

Уравнения,
неравенства и
системы на ОГЭ

Тренировочные задания с примерами

Пример 1. Решите уравнение:

$$2x^2 - x - 1 = 0$$

Решение:

$$2x^2 - x - 1 = 0$$

$$a = 2; b = -1; c = -1.$$

$$D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 1 + 8 = 9 = 3^2$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{1+3}{4} \\ x = \frac{1-3}{4} \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -0,5 \end{array} \right.$$

Ответ: $-0,5; 1$.

Тренировочные задания

Решите уравнение:

1. $5x^2 + x - 4 = 0;$
2. $5x^2 + 2x - 3 = 0;$
3. $-2x^2 + 7x - 6 = 0;$
4. $4x^2 + x - 3 = 0;$
5. $-3x^2 + 8x - 5 = 0;$
6. $5x^2 - 11x + 2 = 0;$
7. $-8x^2 + 6x + 9 = 0;$
8. $6x^2 - 17x + 5 = 0;$
9. $2x^2 + x - 3 = 0;$
10. $5x^2 - 26x + 5 = 0.$

Пример 2. Решите уравнение:

$$(x + 3)^4 - 6(x + 3)^2 - 7 = 0$$

Решение:

$$(x + 3)^4 - 6(x + 3)^2 - 7 = 0$$

Пусть $(x + 3)^2 = t$ ($t \geq 0$), тогда $t^2 - 6t - 7 = 0$.

$$a = 1; b = -6; c = -7.$$

$$D = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-7) = 36 + 28 = 64 = 8^2$$

$$\left[\begin{array}{l} t = \frac{6 + 8}{2} \\ t = \frac{6 - 8}{2} \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} t = 7 \\ t = -1, \text{ не удовлетворяет условию } t \geq 0 \end{array} \right.$$

$$(x + 3)^2 = 7$$

$$\left[\begin{array}{l} x + 3 = \sqrt{7} \\ x + 3 = -\sqrt{7} \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \sqrt{7} - 3 \\ x = -\sqrt{7} - 3 \end{array} \right.$$

Ответ: $-\sqrt{7} - 3; \sqrt{7} - 3$.

Тренировочные задания

Решите уравнение:

1. $5(x - 3)^4 + (x - 3)^2 - 4 = 0;$
2. $4(x - 2)^4 + 7(x - 2)^2 - 2 = 0;$
3. $3(x - 4)^4 + 2(x - 4)^2 - 5 = 0;$
4. $22(x - 5)^4 - 9(x - 5)^2 - 1 = 0.$

Пример 3. Решите уравнение:

$$(x - 2)(x - 3)(x - 5) = (x - 2)(x - 4)(x - 5)$$

Решение:

$$(x - 2)(x - 3)(x - 5) - (x - 2)(x - 4)(x - 5) = 0$$

$$(x - 2)(x - 5)((x - 3) - (x - 4)) = 0$$

$$(x - 2)(x - 5) = 0$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ x = 5 \end{cases}$$

Ответ: 2; 5.

Тренировочные задания

Решите уравнение:

1. $(x + 2)(x - 13)(x - 4) = (x + 3)(x - 5)(x - 13);$

2. $(x - 4)(x + 5)(x + 7) = (x + 5)(x + 7)(x - 2);$

3. $(x - 7)(x - 4)(x - 6) = (x - 7)(x - 3)(x - 6);$

4. $(x - 2)(x - 3)(x - 5) = (x - 2)(x - 4)(x - 5);$

5. $(x - 8)(x - 11)(x + 5) = (x - 8)(x - 6)(x + 5);$

6. $(x - 22)(x + 4)(x - 12) = (x - 22)(x + 14)(x - 12);$

7. $(x - 2)(x - 9)(x - 6) = (x - 6)(x - 8)(x - 2);$

8. $(x - 5)(x - 3)(x - 4) = (x - 4)(x - 3)(x - 5);$

9. $(x - 3)(x - 2)(x - 1) = (x - 1)(x - 3)(x - 5);$

10. $(x - 4)(x - 8)(x - 7) = (x - 7)(x - 4)(x - 3).$

Пример 4. Решите уравнение:

$$x^3 + 2x^2 - 9x - 18 = 0$$

Решение:

$$x^3 + 2x^2 - 9x - 18 = 0$$

$$x^2(x + 2) - 9(x + 2) = 0$$

$$(x^2 - 9)(x + 2) = 0$$

$$(x - 3)(x + 3)(x + 2) = 0$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ x = -3 \\ x = -2 \end{cases}$$

Ответ: -3 ; -2 ; 3 .

Тренировочные задания

Решите уравнение:

1. $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$;

2. $x^3 + 5x^2 - x - 5 = 0$;

3. $x^3 + 5x^2 - 9x - 45 = 0$;

4. $x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0$;

5. $x^3 + 4x^2 - x - 4 = 0$;

6. $x^3 + 8x^2 - 9x - 72 = 0$;

7. $x^3 - 2x^2 - 9x + 18 = 0$;

8. $x^3 + 4x^2 - 9x - 36 = 0$;

9. $x^3 + 3x^2 - 16x - 48 = 0$;

10. $x^3 + 7x^2 - 4x - 28 = 0$.

Пример 5. Решите уравнение:

$$x^3 + 3x^2 = 16x + 48$$

Решение:

$$x^3 + 3x^2 = 16x + 48$$

$$x^2(x + 3) - 16(x + 3) = 0$$

$$(x^2 - 16)(x + 3) = 0$$

$$(x - 4)(x + 4)(x + 3) = 0$$

$$\begin{cases} x = 4 \\ x = -4 \\ x = -3 \end{cases}$$

Ответ: -4 ; -3 ; 4 .

Тренировочные задания

Решите уравнение:

1. $x^3 + 3x^2 = 16x + 48$;

2. $x^3 + 5x^2 = 4x + 20$;

3. $x^3 + 2x^2 = 9x + 18$;

4. $x^3 + 6x^2 = 9x + 54$;

5. $x^3 - 3x^2 = 16x - 48$;

6. $x^3 - 2x^2 = 25x - 50$;

7. $x^3 - 3x^2 = 9x - 27$;

8. $x^3 - 5x^2 = 4x - 20$;

9. $x^3 - 8x^2 = 16x - 128$;

10. $x^3 + 4x^2 = 9x + 36$.

Пример 6. Решите уравнение:

$$x(x^2 + 6x + 9) = 4(x + 3)$$

Решение:

$$x(x^2 + 6x + 9) = 4(x + 3)$$

$$x(x + 3)^2 = 4(x + 3)$$

$$x(x + 3)^2 - 4(x + 3) = 0$$

$$(x + 3)(x(x + 3) - 4) = 0$$

$$(x + 3)(x^2 + 3x - 4) = 0$$

$$(x + 3)(x - 1)(x + 4) = 0$$

$$\begin{cases} x = -4 \\ x = -3 \\ x = 1 \end{cases}$$

Ответ: -4 ; -3 ; 1 .

Тренировочные задания

Решите уравнение:

1. $x(x^2 + 2x + 1) = 5(x + 1)$;
2. $x(x^2 + 4x + 4) = 3(x + 2)$;
3. $x(x^2 + 6x + 9) = 4(x + 3)$;
4. $x(x^2 + 8x + 16) = 8(x + 4)$;
5. $x(x^2 + x + 0,25) = 7(x + 0,5)$;
6. $x(x^2 + 5x + 6,25) = 3(x + 2,5)$;
7. $(x - 1)(x^2 + 10x + 25) = 4(x + 5)$;
8. $(x - 2)(x^2 + 2x + 1) = 5(x + 1)$;

Пример 7. Решите уравнение:

$$(x^2 - 25)^2 + (x^2 + 2x - 15)^2 = 0$$

Решение:

Сумма двух неотрицательных чисел равна нулю, тогда и только тогда, когда каждое из них равно нулю.

$$\begin{cases} x^2 - 25 = 0 \\ x^2 + 2x - 15 = 0 \end{cases}$$

Решим первое уравнение системы:

$$x^2 - 25 = 0$$

$$(x - 5)(x + 5) = 0$$

$$\begin{cases} x = 5 \\ x = -5 \end{cases}$$

Решим второе уравнение системы:

$$x^2 + 2x - 15 = 0$$

$$a = 1; b = 2; c = -15$$

$$\frac{D}{4} = 1^2 - (-15) = 16 = 4^2$$

$$\begin{cases} x = -1 + 4 \\ x = -1 - 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ x = -5 \end{cases}$$

Находим общий корень двух уравнений. -5 является корнем первого и второго уравнения.

Ответ: -5.

Тренировочные задания

Решите уравнение:

1. $(x^2 - 9)^2 + (x^2 - 2x - 15)^2 = 0;$
2. $(x^2 - 36)^2 + (x^2 + 4x - 12)^2 = 0;$
3. $(x^2 - 1)^2 + (x^2 - 2x - 7)^2 = 0;$
4. $(x^2 - 4)^2 + (x^2 - 3x - 10)^2 = 0;$
5. $(x^2 - 49)^2 + (x^2 + 4x - 21)^2 = 0;$
6. $(x^2 - 16)^2 + (x^2 - 3x - 4)^2 = 0;$
7. $(x^2 - 2x + 1)^2 + (x^2 + 5x - 6)^2 = 0;$
8. $(x^2 - 4x + 4)^2 + (x^2 - x - 3)^2 = 0;$
9. $(x^2 - 8x + 7)^2 + (x^2 - 7x + 6)^2 = 0;$
10. $(x^2 - 10x + 21)^2 + (x^2 + 4x - 21)^2 = 0.$

Пример 8. Решите уравнение:

$$x^4 = (x - 20)^2$$

Решение:

$$(x^2)^2 - (x - 20)^2 = 0$$

$$(x^2 - (x - 20)) \cdot (x^2 + (x - 20)) = 0$$

$$\begin{cases} x^2 - (x - 20) = 0 \\ x^2 + (x - 20) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - x + 20 = 0 \\ x^2 + x - 20 = 0 \end{cases}$$

Решим первое уравнение совокупности:

$$x^2 - x + 20 = 0$$

$$D = 1 - 80 = -79$$

Так как дискриминант квадратного уравнения отрицательный, то уравнение не имеет действительных корней.

Решим второе уравнение совокупности:

$$x^2 + x - 20 = 0$$

$$D = 1 + 80 = 81 = 9^2$$

$$\begin{cases} x = \frac{-1 + 9}{2} \\ x = \frac{-1 - 9}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 4 \\ x = -5 \end{cases}$$

Ответ: $-5; 4$.

Тренировочные задания

Решите уравнение:

1. $x^4 = (x - 10)^2$;

2. $x^4 = (x + 7)^2$;

3. $x^4 = (2x - 5)^2$;

4. $x^4 = (3x + 4)^2$.

Пример 9. Решите уравнение:

$$x^6 = (2x - 1)^3$$

Решение:

$$(x^2)^3 = (2x - 1)^3$$

$$x^2 = 2x - 1$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$(x - 1)^2 = 0$$

$$x - 1 = 0$$

$$x = 1$$

Ответ: 1.

Тренировочные задания

Решите уравнение:

1. $x^6 = (x - 10)^3$;

2. $x^6 = (x - 5)^3$;

3. $x^6 = (6x - 8)^3$;

4. $x^6 = (3x - 4)^3$.

Пример 10. Решите уравнение:

$$x^2 - 7x + \sqrt{x - 3} = \sqrt{x - 3} + 18$$

Решение:

$$x^2 - 7x + \sqrt{x - 3} = \sqrt{x - 3} + 18$$

$$\begin{cases} x^2 - 7x - 18 = 0 \\ x - 3 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 7x - 18 = 0 \\ x - 3 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x - 9) \cdot (x + 2) = 0 \\ x - 3 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 9 \\ x = -2 \\ x \geq 3 \end{cases}$$

Ответ: 9.

Тренировочные задания

Решите уравнение:

1. $x^2 - 2x + \sqrt{x - 4} = \sqrt{x - 4} + 15;$

2. $x^2 - 3x + \sqrt{3 - x} = \sqrt{3 - x} + 10;$

3. $x^2 - 2x + \sqrt{x - 5} = \sqrt{x - 5} + 35;$

4. $x^2 - 2x + \sqrt{2 - x} = \sqrt{2 - x} + 3;$

5. $x^2 - 5x + \sqrt{x - 3} = \sqrt{x - 3} - 6;$

6. $x^2 - 6x + \sqrt{6 - x} = \sqrt{6 - x} + 7;$

7. $x^2 - 3x + \sqrt{2 - x} = \sqrt{2 - x} + 18;$

8. $x^2 - 2x + \sqrt{4 - x} = \sqrt{4 - x} + 15.$

Пример 11. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + 3y^2 = 31 \\ 2x^2 + 6y^2 = 31x \end{cases}$$

Решение:

Умножим первое уравнение системы на -2 и сложим со вторым уравнением системы.

$$\begin{cases} -2x^2 - 6y^2 = -31 \cdot 2 \\ 2x^2 + 6y^2 = 31x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = 31 \cdot 2 - 31x \\ 2x^2 + 6y^2 = 31x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ 2x^2 + 6y^2 = 31x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ 2 \cdot 2^2 + 6y^2 = 31 \cdot 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ 6y^2 = 54 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y^2 = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ \begin{cases} y = 3 \\ y = -3 \end{cases} \end{cases}$$

Ответ: (2; 3), (2; -3).

Тренировочные задания

Решите систему уравнений:

1.
$$\begin{cases} 5x^2 + y^2 = 61 \\ 15x^2 + 3y^2 = 61x \end{cases};$$

2.
$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 36 \\ 8x^2 + 4y^2 = 36x \end{cases};$$

3.
$$\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 = 21 \\ 6x^2 + 9y^2 = 21x \end{cases};$$

4.
$$\begin{cases} x^2 + 3y^2 = 31 \\ 2x^2 + 6y^2 = 31x \end{cases};$$

5.
$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 25 \\ 3x^2 + 12y^2 = 25x \end{cases};$$

6.
$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 52 \\ 3x^2 + 6y^2 = 52x \end{cases};$$

Пример 12. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 7x^2 - 5x = y \\ 7x - 5 = y \end{cases}$$

Решение:

Умножим второе уравнение на -1 и сложим с первым уравнением системы.

$$\begin{cases} 7x^2 - 5x = y \\ 7x - 5 = y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7x^2 - 5x - 7x + 5 = 0 \\ 7x - 5 = y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7x^2 - 12x + 5 = 0 \\ 7x - 5 = y \end{cases}$$

Решим первое уравнение системы:

$$7x^2 - 12x + 5 = 0$$

$$a = 7; b = -12; c = 5.$$

$$D = b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4 \cdot 7 \cdot 5 = 144 - 140 = 4 = 2^2$$

$$\begin{cases} x = \frac{12 + 2}{14} \\ x = \frac{12 - 2}{14} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{5}{7} \end{cases}$$

Подставим найденные значения x во второе уравнение системы:

$$\begin{cases} x = 1 \\ 7x - 5 = y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{5}{7} \\ 7x - 5 = y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{5}{7} \\ y = 0 \end{cases}$$

Ответ: $(1; 2), (\frac{5}{7}; 0)$.

Тренировочные задания

Решите уравнение:

1. $\begin{cases} 6x^2 - 2x = y; \\ 6x - 2 = y \end{cases}$;

2. $\begin{cases} 11x^2 - 2x = y; \\ 11x - 2 = y \end{cases}$;

3. $\begin{cases} 4x^2 - 5x = y; \\ 8x - 10 = y \end{cases}$;

4. $\begin{cases} 4x^2 - 3x = y; \\ 8x - 6 = y \end{cases}$;

5. $\begin{cases} 2x^2 - 10x = y; \\ 8x - 40 = y \end{cases}$;

6. $\begin{cases} 9x^2 - 14x = y; \\ 36x - 56 = y \end{cases}$.

Пример 13. Решите уравнение:

$$\begin{cases} x^2 + y = 7 \\ 2x^2 - y = 5 \end{cases}$$

Решение:

$$\begin{cases} x^2 + y = 7 \\ 2x^2 - y = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x^2 = 12 \\ 2x^2 - y = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 = 4 \\ 2x^2 - y = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases} \\ 2x^2 - y = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases} \\ y = 2x^2 - 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \cdot 4 - 5 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \cdot 4 - 5 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases} \end{cases}$$

Ответ: (2; 3), (-2; 3).

Тренировочные задания

Решите уравнение:

1.
$$\begin{cases} 4x^2 + y = 9; \\ 8x^2 - y = 3; \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} x^2 + 2y = 8; \\ 5x^2 - 2y = 6; \end{cases}$$

3.
$$\begin{cases} 5x^2 + 2y = 12; \\ 9x^2 - 2y = 2; \end{cases}$$

4.
$$\begin{cases} 3x^2 + y = 9; \\ 7x^2 - y = 1; \end{cases}$$

5.
$$\begin{cases} 2x^2 + y = 4; \\ 4x^2 - y = 2; \end{cases}$$

6.
$$\begin{cases} x^2 + y = 14; \\ 3x^2 - y = 10. \end{cases}$$

Пример 14. Решите неравенство:

$$(x - 6)^2 < \sqrt{8}(x - 6)$$

Решение:

$$(x - 6)^2 < \sqrt{8}(x - 6)$$

$$(x - 6)^2 - \sqrt{8}(x - 6) < 0$$

$$(x - 6)(x - (6 + \sqrt{8})) < 0$$

Ответ: $(6; 6 + \sqrt{8})$.

Тренировочные задания

Решите неравенство:

1. $(x - 1)^2 < \sqrt{4}(x - 1)$;
2. $(x - 3)^2 < \sqrt{3}(x - 3)$;
3. $(x - 8)^2 < \sqrt{5}(x - 8)$;
4. $(x - 7)^2 < \sqrt{2}(x - 7)$;
5. $(x - 6)^2 < \sqrt{10}(x - 6)$;
6. $(x - 4)^2 < \sqrt{6}(x - 4)$;
7. $(x - 6)^2 < \sqrt{8}(x - 6)$;
8. $(x - 5)^2 < \sqrt{7}(x - 5)$;
9. $(x - 15)^2 < \sqrt{11}(x - 15)$;
10. $(x - 13)^2 < \sqrt{17}(x - 13)$.

Пример 15. Решите неравенство:

$$\frac{-2020}{x^2 + x - 12} \leq 0$$

Решение:

$$\frac{-2020}{x^2 + x - 12} \leq 0$$

$-2020 < 0$. Следовательно, $x^2 + x - 12 > 0$.

$$(x + 4)(x - 3) > 0$$

Ответ: $(-\infty; -4) \cup (3; +\infty)$.

Тренировочные задания

Решите неравенство:

1. $\frac{-2021}{x^2+6x-16} \leq 0;$

6. $\frac{-10}{x^2-6x-4} \geq 0;$

2. $\frac{-27}{x^2+9x-10} \leq 0;$

7. $\frac{-18}{x^2+8x+6} \geq 0;$

3. $\frac{-14}{x^2+2x-12} \leq 0;$

8. $\frac{-14}{x^2-10x-23} \geq 0;$

4. $\frac{-15}{x^2+2x-2} \leq 0;$

9. $\frac{-16}{x^2+4x-1} \geq 0;$

5. $\frac{-13}{x^2-8x+10} \leq 0;$

10. $\frac{-9}{x^2-6x+5} \geq 0.$

Пример 16. Найдите значение выражения при данном условии:

$$39a - 15b + 25, \text{ если } \frac{3a-6b+4}{6a-3b+4} = 7$$

Решение:

$$\frac{3a - 6b + 4}{6a - 3b + 4} = 7$$

$$3a - 6b + 4 = 7 \cdot (6a - 3b + 4)$$

$$3a - 6b + 4 = 42a - 21b + 28$$

$$3a - 42a - 6b + 21b + 4 - 28 = 0$$

$$-39a + 15b - 24 = 0$$

$$39a - 15b + 24 = 0$$

Следовательно, $39a - 15b + 25 = 39a - 15b + 24 + 1 = 0 + 1 = 1$.

Ответ: 1.

Тренировочные задания

Найдите значение выражения при данном условии:

1. $25a - 5b + 17$, если $\frac{3a-7b+6}{7a-3b+6} = 4$;

2. $41a - 11b + 15$, если $\frac{4a-9b+3}{9a-4b+3} = 5$;

3. $61a - 11b + 88$, если $\frac{2a-7b+5}{7a-2b+5} = 9$;

4. $31a - 4b + 55$, если $\frac{a-4b+7}{4a-b+7} = 8$.

Источник заданий: открытый банк заданий Fipi.ru